

# 2024 年普通高等学校招生考试新课标 II 卷

## 数 学

### 注意事项:

- 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
- 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 满分 40 分。每小题给出的备选答案中, 只有一个是符合题意的。

- 已知  $z = -1 - i$ , 则  $|z| =$   
A. 0                      B. 1                      C.  $\sqrt{2}$                       D. 2
- 已知命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x + 1| > 1$ ; 命题  $q: \exists x > 0, x^3 = x$ , 则  
A.  $p$  和  $q$  都是真命题                      B.  $\neg p$  和  $q$  都是真命题  
C.  $p$  和  $\neg q$  都是真命题                      D.  $\neg p$  和  $\neg q$  都是真命题
- 已知向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  满足:  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = 2$ , 且  $(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \perp \mathbf{b}$ , 则  $|\mathbf{b}| =$   
A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       D. 1
- 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植新型水稻, 得到各块稻田的亩产量 (单位: kg) 并部分整理如下表所示。

亩产	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)	[1050,1150)	[1150,1200)
频数	6	12	18	24	10

根据表中数据, 下列结论正确的是

- 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 kg
- 100 块稻田中亩产量低于 1100 kg 的稻田所占比例超过 40%
- 100 块稻田亩产量的极差介于 200 kg 到 300 kg 之间
- 100 块稻田亩产量的平均值介于 900 kg 到 1000 kg 之间

5. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16$  ( $y > 0$ ), 从 $C$ 上任意一点 $P$ 向 $x$ 轴作垂线段 $PP'$ ,  $P'$ 为垂足, 则线段 $PP'$ 的中点 $M$ 的轨迹方程为

- A.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  ( $y > 0$ )                      B.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$  ( $y > 0$ )  
 C.  $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$  ( $y > 0$ )                      D.  $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1$  ( $y > 0$ )

6. 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$ ,  $g(x) = \cos x + 2ax$  ( $a$ 为常数), 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a =$

- A.  $-1$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $1$                       D.  $2$

7. 已知正三棱台 $ABC - A'B'C'$ 的体积为 $\frac{52}{3}$ ,  $AB = 6$ ,  $A_1B_1 = 2$ , 则 $AA'$ 与平面 $ABC$ 所成角的正切值为

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $1$                       C.  $2$                       D.  $3$

8. 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$ , 若 $f(x) \geq 0$ , 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为

- A.  $\frac{1}{8}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $1$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 满分 18 分。每小题给出的备选答案中, 有多个选项是符合题意的。全部选对得 6 分, 部分选对得 3 分, 选错或不选得 0 分。

9. 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ , 下列正确的有

- A.  $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同零点                      B.  $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同最大值  
 C.  $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期                      D.  $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同对称轴

10. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 $l$ ,  $P$ 为 $C$ 上动点, 过 $P$ 作 $\odot A: x^2 + (y-4)^2 = 1$ 的一条切线,  $Q$ 为切点。过 $P$ 作 $C$ 的垂线, 垂足为 $B$ , 则

- A.  $l$ 与 $\odot A$ 相切  
 B. 当 $P$ 、 $A$ 、 $B$ 三点共线时,  $|PQ| = \sqrt{15}$   
 C. 当 $|PB| = 2$ 时,  $PA \perp AB$   
 D. 满足 $|PA| = |PB|$ 的点 $A$ 有且仅有 2 个

11. 设函数  $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$ , 则

- A. 当  $a > 1$  时,  $f(x)$  的三个零点
- B. 当  $a < 0$  时,  $x = 0$  是  $f(x)$  的极大值点
- C. 存在  $a, b$ , 使得  $x = b$  为曲线  $f(x)$  的对称轴
- D. 存在  $a$ , 使得点  $(1, f(1))$  为曲线  $y = f(x)$  的对称中心

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分。

12. 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_3 + a_4 = 7, 3a_2 + a_5 = 5$ , 则  $S_{10} =$  \_\_\_\_\_。

13. 已知  $\alpha$  为第一象限角,  $\beta$  为第三象限角,  $\tan\alpha + \tan\beta = 4$ ,  
 $\tan\alpha \tan\beta = \sqrt{2} + 1$ , 则  $\sin(\alpha + \beta) =$  \_\_\_\_\_。

14. 在下图的  $4 \times 4$  方格表中有 4 个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有 \_\_\_\_\_ 种选法; 在符合上述要求的选法中, 选中方格中的四个数之和的最大值是 \_\_\_\_\_。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

四、解答题: 本题共 5 小题, 满分 87 分。解答应写出必要的文字说明、计算过程、证明过程。

15. (本题满分 13 分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ 。

(1) 求  $A$ ;

(2) 若  $a = 2, \sqrt{2} b \sin C = c \sin 2B$ , 求  $\triangle ABC$  的周长。

16. (本题满分 15 分)

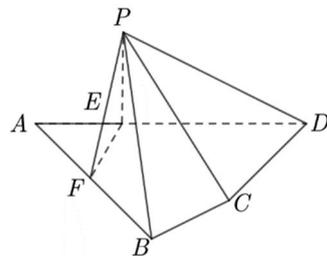
已知函数  $f(x) = e^x - ax - a^3$ 。

(1) 当  $a = 1$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程。

(2) 若  $f(x)$  有极小值, 且极小值小于 0, 求  $a$  的取值范围。

17. (本题满分 15 分)

如图, 平面四边形  $ABCD$  中,  $AB = 8$ ,  $CD = 3$ ,  $AD = 5\sqrt{3}$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ ,  $\angle BAD = 30^\circ$ , 点  $E$ 、 $F$  满足  $\overrightarrow{AE} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ , 将  $\triangle AEF$  沿  $EF$  对折至  $\triangle PEF$ , 使得  $PC = 4\sqrt{3}$ 。



(1) 证明:  $EF \perp PD$ 。

(2) 求面  $PCD$  与面  $PBF$  所成的二面角的正弦值。

18. (本题满分 17 分)

某投篮比赛分为两个阶段, 每个参赛队由两名队员组成, 比赛具体规则如下: 第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次, 若 3 次都未投中, 则该队被淘汰, 比赛成绩为 0 分; 若至少投中 1 次, 则该队进入第二阶段, 由该队的另一名队员投篮 3 次, 每次投中得 5 分, 未投中得 0 分。该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和。

某参赛队由甲、乙两名队员组成, 设甲每次投中的概率为  $p$ , 乙每次投中的概率为  $q$ , 各次投中与否相互独立。

(1) 若  $p = 0.4$ ,  $q = 0.5$ , 甲参加第一阶段比赛, 求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率。

(2) 假设  $0 < p < q$ 。

(i) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

(ii) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

19. (本题满分 17 分)

已知双曲线  $C: x^2 - y^2 = m$  ( $m > 0$ ), 点  $P_1(5, 4)$  在  $C$  上,  $k$  为常数,  $0 < k < 1$ , 按照如下公式依次构造点  $P_n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ): 过点  $P_{n-1}$  作斜率为  $k$  的直线与  $C$  的左支交于点  $Q_{n-1}$ , 令  $P_n$  为  $Q_{n-1}$  关于  $y$  轴的对称点, 记  $P_n$  的坐标为  $(x_n, y_n)$ 。

(1) 若  $k = \frac{1}{2}$ , 求  $x_2$ 、 $y_2$ 。

(2) 证明: 数列  $\{x_n - y_n\}$  是公比为  $\frac{1+k}{1-k}$  的等比数列。

(3) 设  $S_n$  为  $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$  的面积, 证明: 对于任意正整数  $n$ ,  $S_n = S_{n+1}$ 。