

2024 年普通高等学校招生考试新课标 II 卷

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 满分 40 分。每小题给出的备选答案中, 只有一个是符合题意的。

1. 已知 $z = -1 - i$, 则 $|z| =$
A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
2. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x + 1| > 1$; 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则
A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题
3. 已知向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 满足: $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = 2$, 且 $(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \perp \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{b}| =$
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1
4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植新型水稻, 得到各块稻田的亩产量 (单位: kg) 并部分整理如下表所示。

亩产	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)	[1050,1150)	[1150,1200)
频数	6	12	18	24	10

根据表中数据, 下列结论正确的是

- A. 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 kg
- B. 100 块稻田中亩产量低于 1100 kg 的稻田所占比例超过 40%
- C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200 kg 到 300 kg 之间
- D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900 kg 到 1000 kg 之间

5. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16$ ($y > 0$), 从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP' , P' 为垂足, 则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为
- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y > 0$) B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ ($y > 0$)
 C. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ ($y > 0$) D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1$ ($y > 0$)
6. 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \cos x + 2ax$ (a 为常数), 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a =$
- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2
7. 已知正三棱台 $ABC - A'B'C'$ 的体积为 $\frac{52}{3}$, $AB = 6$, $A_1B_1 = 2$, 则 AA' 与平面 ABC 所成角的正切值为
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3
8. 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$, 若 $f(x) \geq 0$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 满分 18 分。每小题给出的备选答案中, 有多个选项是符合题意的。全部选对得 6 分, 部分选对得 3 分, 选错或不选得 0 分。

9. 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 下列正确的有
- A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同零点 B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同最大值
 C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期 D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同对称轴
10. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 l , P 为 C 上动点, 过 P 作 $\odot A: x^2 + (y-4)^2 = 1$ 的一条切线, Q 为切点。过 P 作 C 的垂线, 垂足为 B , 则
- A. l 与 $\odot A$ 相切
 B. 当 P 、 A 、 B 三点共线时, $|PQ| = \sqrt{15}$
 C. 当 $|PB| = 2$ 时, $PA \perp AB$
 D. 满足 $|PA| = |PB|$ 的点 A 有且仅有 2 个

11. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则

- A. 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 的三个零点
- B. 当 $a < 0$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- C. 存在 a, b , 使得 $x = b$ 为曲线 $f(x)$ 的对称轴
- D. 存在 a , 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分。

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 + a_4 = 7, 3a_2 + a_5 = 5$, 则 $S_{10} =$ _____。

13. 已知 α 为第一象限角, β 为第三象限角, $\tan \alpha + \tan \beta = 4$,

$\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____。

14. 在下图的 4×4 方格表中有 4 个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有 _____ 种选法; 在符合上述要求的选法中, 选中方格中的四个数之和的最大值是 _____。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

四、解答题: 本题共 5 小题, 满分 87 分。解答应写出必要的文字说明、计算过程、证明过程。

15. (本题满分 13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ 。

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2$, $\sqrt{2} b \sin C = c \sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长。

16. (本题满分 15 分)

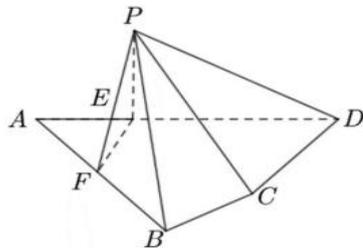
已知函数 $f(x) = e^x - ax - a^3$ 。

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程。

(2) 若 $f(x)$ 有极小值, 且极小值小于 0, 求 a 的取值范围。

17. (本题满分 15 分)

如图, 平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = 8$, $CD = 3$, $AD = 5\sqrt{3}$, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle BAD = 30^\circ$, 点 E 、 F 满足 $\overrightarrow{AE} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 对折至 $\triangle PEF$, 使得 $PC = 4\sqrt{3}$ 。



(1) 证明: $EF \perp PD$ 。

(2) 求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值。

18. (本题满分 17 分)

某投篮比赛分为两个阶段, 每个参赛队由两名队员组成, 比赛具体规则如下: 第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次, 若 3 次都未投中, 则该队被淘汰, 比赛成绩为 0 分; 若至少投中 1 次, 则该队进入第二阶段, 由该队的另一名队员投篮 3 次, 每次投中得 5 分, 未投中得 0 分。该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和。

某参赛队由甲、乙两名队员组成, 设甲每次投中的概率为 p , 乙每次投中的概率为 q , 各次投中与否相互独立。

(1) 若 $p = 0.4$, $q = 0.5$, 甲参加第一阶段比赛, 求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率。

(2) 假设 $0 < p < q$ 。

(i) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

(ii) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大, 应该由谁参加第一阶段比赛?

19. (本题满分 17 分)

已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = m$ ($m > 0$), 点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上, k 为常数, $0 < k < 1$, 按照如下公式依次构造点 P_n ($n = 2, 3, \dots$): 过点 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} , 令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点, 记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) 。

(1) 若 $k = \frac{1}{2}$, 求 x_2 、 y_2 。

(2) 证明: 数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列。

(3) 设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积, 证明: 对于任意正整数 n , $S_n = S_{n+1}$ 。

关于自主选拔在线

自主选拔在线聚焦名校拔尖人才培养，提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、专项计划、少年班、研学实践、学科竞赛、综合素质评价、新高考选科、大学专业、志愿填报、港澳升学、中外合作校、大学保研留学等政策资讯，致力于帮助更多考生圆梦理想高校！旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 95% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

关注自主选拔在线微信公众号，领取更多福利

对话框发送【**思维导图**】，领取《**高中九大学科思维导图（彩图版）**》

对话框发送【**福利**】，领取新人专属福利，不定时更新